Vettori geometrici

Prerequisiti :

Geometria euclidea del piano e dello spazio ("spazio ordinario")

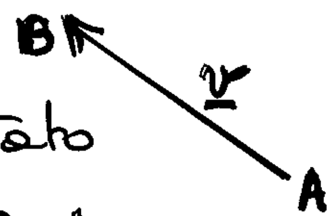
La nozione di vettore ha la sua origine in fisica, nelle situazioni in cui non è sufficiente descrivere un ente per mezzo di una quantità, ma occorre anche precisare la direzione e il verso secondo il quale si svolge un processo relativo a quell'ente.

Es. : forze, velocità, accelerazioni...

Nello spazio ordinario, o nel piano, un vettore $\underline{v}$ viene rappresentato con un segmento orientato (rappr. da una freccia), la cui lunghezza, rispetto ad una fissata unità di misura, è un numero reale non negativo $\|\underline{v}\|$ = modulo, o norma di $\underline{v}$.

direzione : quella della retta

verso : quello del segm. orientato



$$\underline{v} = AB = \overrightarrow{AB} = B - A$$

<u>Vettore zero</u> $\underline{0}$, o <u>vettor nullo</u> : A = B (un pto)

<u>Def.</u>: Due segmenti orientati AB e CD si dicono <u>equipollenti</u> se ~~si~~ verifica uno dei seguenti fatti:

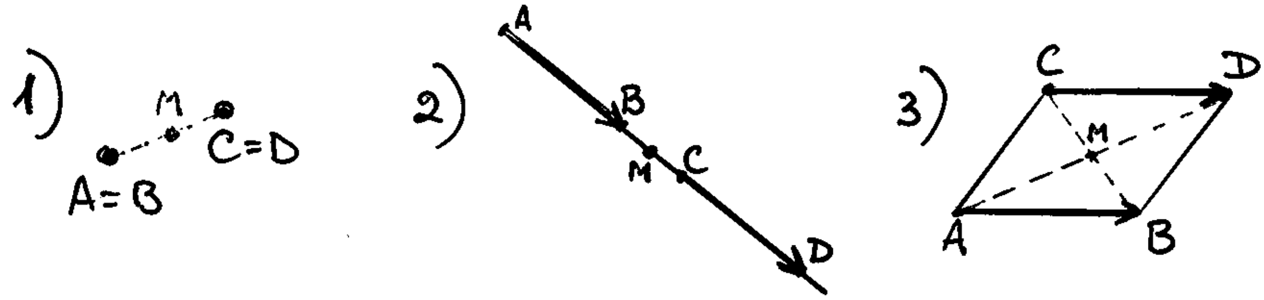
1) A = B ∧ C = D (i due segm. sono entrambi nulli)

oppure

2) AB e CD appartengono alla stessa retta, hanno lo stesso modulo e lo stesso verso,

oppure

3) AB e CD sono lati opposti ed ugualmente orientati di un parallelogramma



<u>Oss.</u>: Due segmenti orientati AB e CD sono equipollenti (in uno qualunque dei tre casi precedenti!) se, e solo se i segmenti AD e BC hanno lo stesso pto medio M.

Prop. : La relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza sull'insieme dei segmenti orientati dello spazio ordinario.

Def. : Chiamiamo vettori geometrici o, semplicemente, vettori) dello spazio ordinario le classi di equipollenza dei segmenti orientati.

Un rappresentante AB del vettore $\underline{u}$ si dice anche vettore applicato in A e si dice che A è il punto di applicazione di $\underline{u}$.

(Con $\underline{u} = AB$ intenderemo che il segmento orientato AB rappresenta il vettore $\underline{u}$.

Talvolta parleremo semplicemente di vettori per intendere, senza ambiguità, un loro rappresentante.)

Notazione : Denoteremo con $\mathcal{V}$ l'insieme dei vettori dello spazio ordinario

- OPERAZIONI SUI VETTORI -

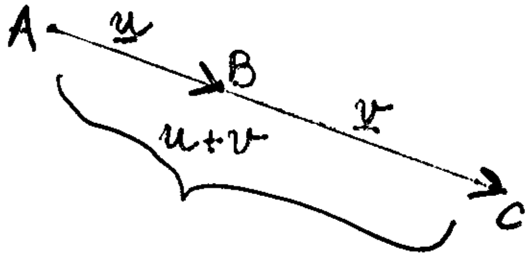
1. Addizione di vettori

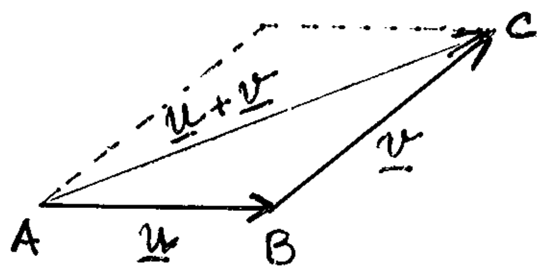
L'addizione si definisce in modo tale da corrispondere alla "composizione" degli enti fisici rappresentati dai vettori, cosicché la "somma" di vettori corrisponderà alla "risultante" delle azioni rappresentate :

Def. : (Legge di Galileo) Se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono due vettori dello spazio ordinario, la loro somma è rappresentata dal vettore che si ottiene applicando $\underline{v}$ al punto di arrivo di $\underline{u}$, cioè :

se $\underline{u} = AB$ e $\underline{v} = BC$,

allora $\underline{u} + \underline{v} := AC$





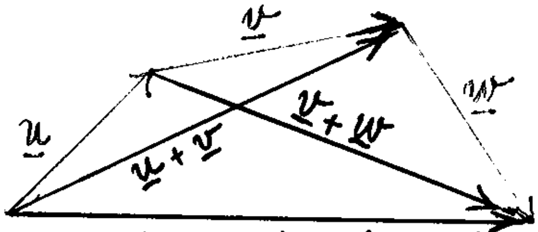
regola del "parallelogramma"

Addizione :

$$\boxed{+ : \begin{cases} \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \\ (\underset{\substack{\parallel \\ AB}}{\underline{u}}, \underset{\substack{\parallel \\ BC}}{\underline{v}}) \longmapsto \underline{u} + \underline{v} := AC \end{cases}}$$

Proprietà dell'addizione :

1. Associativa : $\boxed{\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}}$



$$\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$$

2. Esistenza dello zero : $\boxed{\underline{u} + \underline{0} = \underline{u} \quad \forall \underline{u} \in V}$

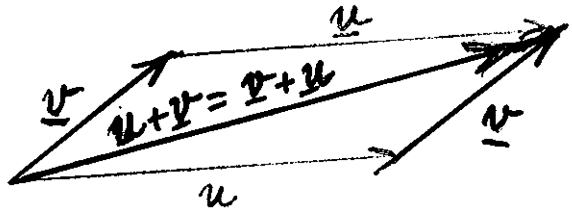
3. Esistenza dell'opposto : $\boxed{\forall \underline{u} \in V \quad \exists!\, u' \in V : \quad \underline{u} + \underline{u}' = \underline{0}}$

poniamo $-\underline{u} := u' \implies \underline{u} - \underline{u}' = \underline{0}$

Dunque $(V, +)$ è un gruppo.

Inoltre :

4. Commutativa : $\boxed{\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}}$

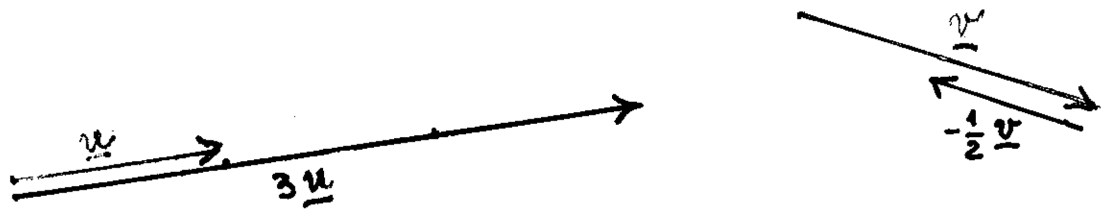


Possiamo quindi concludere che $(V, +)$ è un gruppo abeliano.

2. Moltiplicazione per scalari

Si definisce una moltiplicazione di vettori per numeri reali, detti scalari, che non fa cambiare la direzione ma, se lo scalare è negativo, fa cambiare il verso:

Def.: Il prodotto (esterno) $\alpha \cdot \underline{u}$ dello scalare α per il vettore $\underline{u}$ è il vettore il cui modulo è $|\alpha| \cdot \|\underline{u}\|$, la cui direzione, se $\alpha \neq 0$ e $\underline{u} \neq \underline{0}$, è la stessa di $\underline{u}$ e il cui verso è quello di $\underline{u}$, se $\alpha > 0$, o il suo opposto, se $\alpha < 0$, a seconda che α sia positivo o negativo.



Moltiplicazione per scalari:

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \\ (\alpha, \underline{u}) \longmapsto \alpha \cdot \underline{u} \end{cases}$$

Oss.: $\Rightarrow$ $\alpha \underline{u} = \underline{0}$ sse $\alpha = 0 \vee \underline{u} = \underline{0}$

i) $\|\alpha \cdot \underline{u}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{u}\|$

ii) $\alpha \underline{u} \parallel \underline{u}$, se $\alpha \neq 0$ e $\underline{u} \neq \underline{0}$

iii) $\alpha \cdot \underline{u}$ concorde con $\underline{u} \Leftrightarrow \alpha > 0$

$\Downarrow$

$\forall\, \underline{u}, \underline{v} \in \mathcal{V}^*,\ \underline{u} \parallel \underline{v} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}: \underline{v} = \alpha \underline{u}$

Def.: Si dice che il vettore

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \dots + \alpha_r \underline{u}_r$$

è una combinazione lineare dei vettori $u_1, \dots, u_r$ a coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

Proprietà della moltiplicazione esterna:

1. Associativa mista : $\boxed{\alpha(\beta \underline{u}) = (\alpha\beta)\underline{u}}$
2. Legge di unità : $\boxed{1\underline{u} = \underline{u}}$
3. Legge dell'opposto : $\boxed{(-1)\underline{u} = -\underline{u}}$

CONSEGUENZE IMMEDIATE DELLE DEFINIZIONI

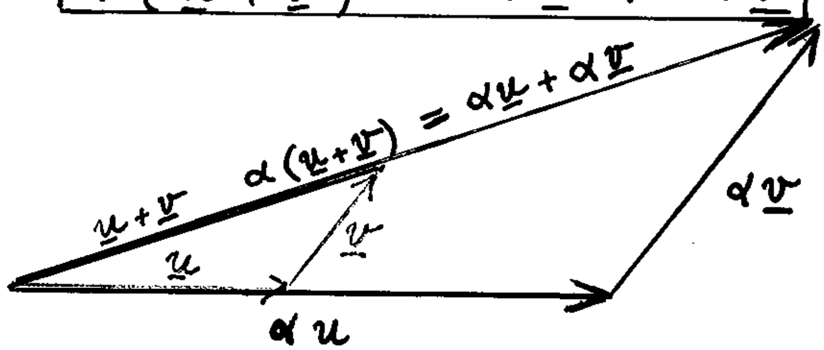
Proprietà di "collegamento":

4. Distributività risp. all'addizione di scalari :

$$\boxed{(\alpha+\beta)\underline{u} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{u}}$$

5. Distributività risp. all'addizione di vettori :

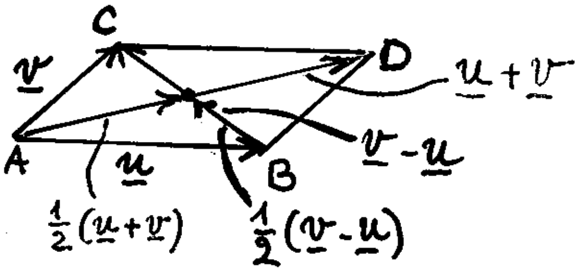
$$\boxed{\alpha(\underline{u}+\underline{v}) = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{v}}$$



Teorema di Talete sui triangoli simili

Esercizio : Si consideri il parallelogramma di lati $AB=\underline{u}$ e $AC=\underline{v}$. Verificare che vale:

$$\underline{u} + \frac{1}{2}(\underline{v}-\underline{u}) = \frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$$



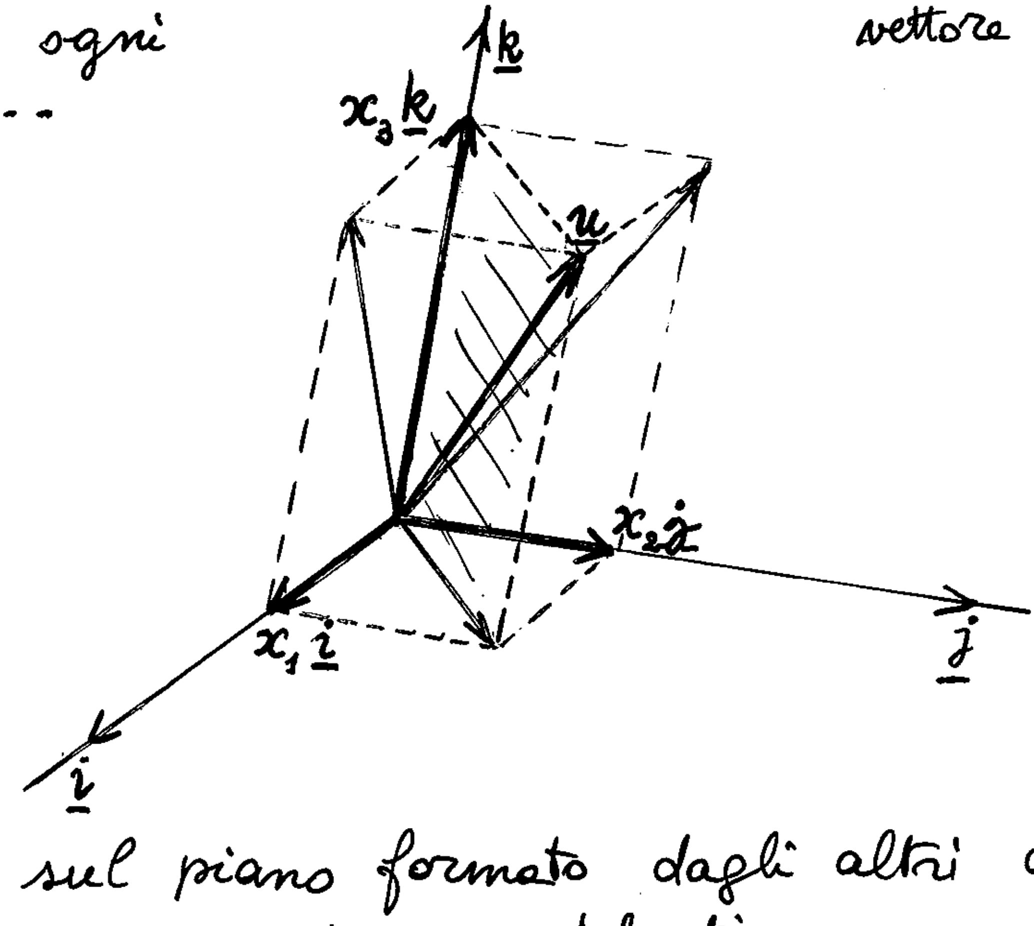
- RAPPRESENTAZIONE ANALITICA -

Vogliamo rappresentare i vettori dello spazio ordinario per mezzo di terne ordinate di numeri reali : le loro <u>componenti</u>.

Si fissi una terna ordinata di vettori $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k} \in V$, <u>non nulli e non appartenenti ad uno stesso piano</u>, cioè <u>linearmente indipendenti</u> : essi costituiscono una <u>base</u>

Proiettando un vettore $\underline{u} \in V$ parallelamente ad ogni vettore della base.

....



... sul piano formato dagli altri due, si ha una scomposizione del tipo :

$$\underline{u} = x_1\underline{i} + x_2\underline{j} + x_3\underline{k}$$

La terna ordinata di numeri reali (x_1, x_2, x_3) fornisce le componenti del vettore $\underline{u}$ rispetto alla base $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$.

Si può stabilire in tal modo una <u>bijezione</u>

$$\chi : \begin{cases} \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{u} \mapsto (x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$ dipendente dalla base fissata!

- Come si eseguono le <u>operazioni sui vettori</u> utilizzando le loro componenti rispetto ad una fissata base?

Se $\underline{u} = x_1 \underline{i} + x_2 \underline{j} + x_3 \underline{k}$

$\underline{v} = y_1 \underline{i} + y_2 \underline{j} + y_3 \underline{k}$

risulta (applicando le prop. delle operaz. definite sui vettori):

- $\underline{u} + \underline{v} = (x_1 + y_1) \underline{i} + (x_2 + y_2) \underline{j} + (x_3 + y_3) \underline{k}$
- $\alpha \underline{u} = (\alpha x_1) \underline{i} + (\alpha x_2) \underline{j} + (\alpha x_3) \underline{k}$

In tal modo abbiamo verificato che la χ <u>"conserva"</u> l'operazione di addizione passando dal gruppo $(\mathcal{V}, +)$ al gruppo $(\mathbb{R}^3, \hat{+})$ definito a suo tempo (entrambi gruppi abeliani) e, se si defisce anche su $\mathbb{R}^3$ una moltiplicazione per scalari $\alpha \cdot (x_1, x_2, x_3) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$, la bijezione χ conserva pure tale operazione.

- PRODOTTO SCALARE E VETTORIALE -

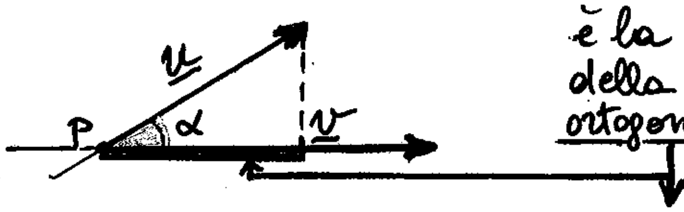
Nello spazio dei vettori geometrici possiamo introdurre altre due operazioni.

- Prodotto scalare

Def.: Dati due vettori $\underline{u}$, $\underline{v} \in \mathcal{V}$, chiamiamo <u>prodotto scalare</u> di $\underline{u}$ e $\underline{v}$ il numero reale:

$$\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} := \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha}$$

(con $0 \leq \alpha \leq \pi$ e α = angolo tra le rette su cui giacciono i due vettori quando sono applicati ad uno stesso punto).



è la lunghezza della <u>proiezione ortogonale</u> di $\underline{u}$ su $\underline{v}$

Oss.: Se $\|v\| = 1$, allora $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{\|u\| \cos\alpha}$

N.B. Se $\underline{u}, \underline{v} \neq \underline{0}$, allora

$$\underline{\underline{u} \cdot \underline{v} = 0} \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{u} \perp \underline{v}}$$

Possiamo dunque concludere:

Il <u>prodotto scalare</u> di due vettori è <u>0</u> se e solo se:

$\boxed{\text{uno dei due vettori è il vettor nullo}}$ o $\boxed{\text{i due vettori sono ortogonali}}$

Possiamo anche esprimere il prodotto scalare come una funzione (operaz. binaria):

$$\boxed{\bullet \;:\; \begin{cases} V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{u}, \underline{v}) \longmapsto \underline{u} \cdot \underline{v} \end{cases}}$$

con $\boxed{\underline{v} \cdot \underline{v} = \|\underline{v}\|^2}$ $(\cos\alpha = 1)$

<u>Proprietà del prodotto scalare.</u>

1. $\boxed{\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}}$

2. $\boxed{(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}}$

3. $\boxed{(\alpha \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot (\alpha \underline{w}) = \alpha (\underline{v} \cdot \underline{w})}$

Le proprietà 1., 2., 3. esprimono la <u>bilinearità</u> del prodotto scalare.
Inoltre vale anche la seguente:

4. $\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}}$ <u>simmetria</u>

- ## Prodotto vettoriale

Introduciamo ora un'operazione interna su V, che associa, cioè, ad ogni coppia di vettori di V un terzo vettore di V

Def: Dati due vettori $\underline{u}, \underline{v} \in V$, si dice prodotto vettoriale di $\underline{u}$ e $\underline{v}$, e si indica con $\boxed{\underline{u} \wedge \underline{v}}$, il vettore di V caratterizzato dalle proprietà:

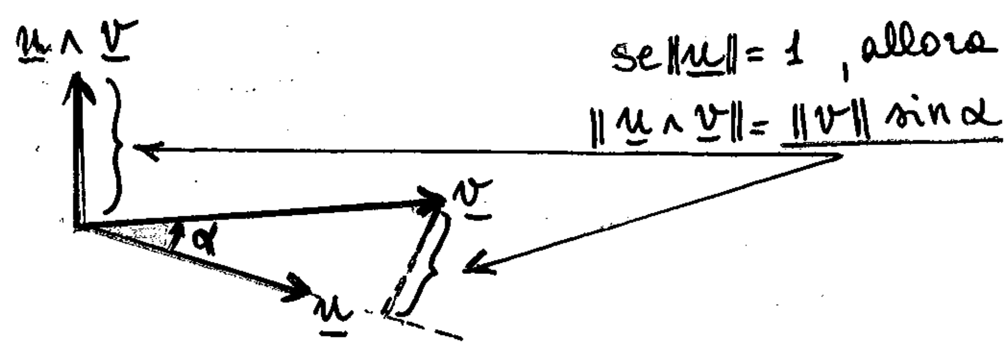
V1. Il modulo di $\underline{u} \wedge \underline{v}$ è:

$$\boxed{\|\underline{u} \wedge \underline{v}\| = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \sin\alpha}$$

(con $0 \leq \alpha \leq \pi$ angolo formato dai due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$).

V2. La direzione di $\underline{u} \wedge \underline{v}$ è quella ortogonale al piano individuato da $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

V3. $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{u} \wedge \underline{v}$ formano una "terna destrorsa", e ciò determina il verso del vettore $\underline{u} \wedge \underline{v}$.



Possiamo anche esprimere il prodotto vettoriale come una funzione (operazione binaria su V):

$$\boxed{\wedge : \begin{cases} V \times V \longrightarrow V \\ (\underline{u}, \underline{v}) \longmapsto \underline{u} \wedge \underline{v} \end{cases}}$$

con $\boxed{\underline{v} \wedge \underline{v} = \underline{0}}$ $(\sin \alpha = 0)$

Proprietà del prodotto vettoriale.

1. $\boxed{\underline{u} \wedge (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \wedge \underline{v} + \underline{u} \wedge \underline{w}}$

2. $\boxed{(\underline{u} + \underline{v}) \wedge \underline{w} = \underline{u} \wedge \underline{w} + \underline{v} \wedge \underline{w}}$

3. $\boxed{(\alpha \underline{v}) \wedge \underline{w} = \underline{v} \wedge (\alpha \underline{w}) = \alpha (\underline{v} \wedge \underline{w})}$

le proprietà 1., 2., 3. esprimono la <u>bilinearità</u> anche per il prodotto vettoriale.
Inoltre vale la seguente:

4. $\boxed{\underline{u} \wedge \underline{v} = -\underline{u} \wedge \underline{u}}$ <u>antisimmetria</u> (o <u>alternanza</u>)

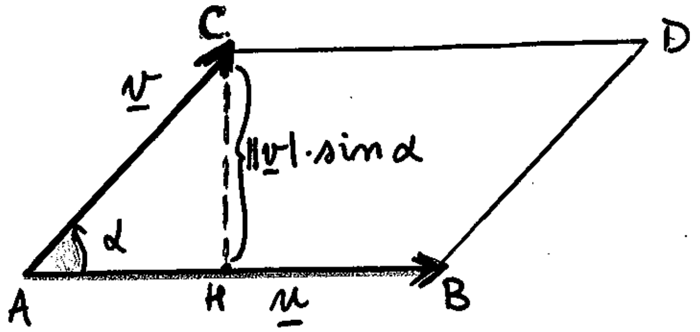
Dalla definizione scende subito che:

$$\boxed{\underline{u} \wedge \underline{v} = \underline{0} \iff \underline{u} \parallel \underline{v} \iff \underline{u} = k \underline{v}}$$

Il <u>prodotto vettoriale</u> di due vettori è il <u>vettor nullo</u> se e solo se i due vettori sono <u>paralleli (= proporzionali)</u>.

- <u>Una notevole interpretazione geometrica del prodotto vettoriale</u> :

$$\|\underline{u} \wedge \underline{v}\| = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \sin\alpha$$



$\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $CH = \|\underline{v}\| \sin\alpha$

$$\Longrightarrow \underline{\|\underline{u} \wedge \underline{v}\|} = AB \cdot CH = \text{\underline{area del parallelogrammo ABCD}}$$

- <u>Espressione del prodotto scalare e del prodotto vettoriale rispetto alle componenti.</u>

Se ora si fissa, nello spazio V dei vettori geometrici, una <u>base $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$</u>, ad ogni vettore $\underline{u} \in V$ rimane associata univocamente una terna ordinata di componenti $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ t.c. $\underline{u} = x_1 \underline{i} + x_2 \underline{j} + x_3 \underline{k}$.

Rappresentiamo allora, rispetto alle componenti, sia il prodotto scalare che il prodotto vettoriale di due vettori

$$\underline{u} = x_1 \underline{i} + x_2 \underline{j} + x_3 \underline{k}$$
$$\underline{v} = y_1 \underline{i} + y_2 \underline{j} + y_3 \underline{k}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1 \underline{i} + x_2 \underline{j} + x_3 \underline{k}) \cdot (y_1 \underline{i} + y_2 \underline{j} + y_3 \underline{k}) =$$

(bilinearità e simmetria) $= x_1 y_1 \, \underline{i} \cdot \underline{i} + x_2 y_2 \, \underline{j} \cdot \underline{j} + x_3 y_3 \, \underline{k} \cdot \underline{k} +$
$$+ (x_1 y_2 + x_2 y_1) \, \underline{i} \cdot \underline{j} + (x_1 y_3 + x_3 y_1) \, \underline{i} \cdot \underline{k} +$$
$$+ (x_2 y_3 + x_3 y_2) \, \underline{j} \cdot \underline{k}$$

Se scegliamo la base in modo che: $\boxed{\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{i} \cdot \underline{k} = \underline{j} \cdot \underline{k} = 0}$

e $\boxed{\underline{i} \cdot \underline{i} = \|\underline{i}\|^2 = \underline{j} \cdot \underline{j} = \|\underline{j}\|^2 = \underline{k} \cdot \underline{k} = \|\underline{k}\|^2 = 1}$

cioè, se scegliamo nello spazio V una "base ortonormale" (= costituita da vettori a due a due ortogonali e tutti di modulo 1), risulta allora:

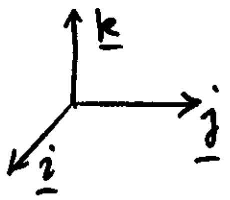
$$\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}$$

Il prodotto scalare, espresso in componenti rispetto ad una base ortonormale $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$, è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omonime dei due vettori.

$\wedge$ $$\underline{u} \wedge \underline{v} = (x_1 \underline{i} + x_2 \underline{j} + x_3 \underline{k}) \wedge (y_1 \underline{i} + y_2 \underline{j} + y_3 \underline{k}) =$$

(bilinearità e alternanza) $$= x_1 y_1 \, \underline{i} \wedge \underline{i} + x_2 y_2 \, \underline{j} \wedge \underline{j} + x_3 y_3 \, \underline{k} \wedge \underline{k} +$$
$$+ (x_1 y_2 - x_2 y_1) \, \underline{i} \wedge \underline{j} + (x_2 y_3 - x_3 y_2) \, \underline{j} \wedge \underline{k} +$$
$$+ (x_3 y_1 - x_1 y_3) \, \underline{k} \wedge \underline{i}$$

Di nuovo, se scegliamo la base (i, j, k) in modo che sia ortonormale, risulterà stavolta:



$$\boxed{\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k} \;,\; \underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i} \;,\; \underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}}$$
$$\boxed{\underline{i} \wedge \underline{i} = \underline{j} \wedge \underline{j} = \underline{k} \wedge \underline{k} = \underline{0}}$$

Quindi:

$$\boxed{\underline{u} \wedge \underline{v} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \, \underline{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \, \underline{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \, \underline{k}}$$

Utilizzando la nozione di determinante, è possibile esprimere il prodotto vettoriale dei due vettori $\underline{u}, \underline{v} \in V$ nel seguente modo:

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$